Mathématiques, Langage et Inégalités Scolaires

Aurélie Chesnais (LIRDEF), Céline Constantin (LIRDEF), Sandrine Bazile (LIRDEF), Nathalie Auger (LHUMAIN)

Journées des INSPE d'Occitanie

26-28 juin 2023

Didactique des mathématiques et linguistique

Dispositif collaboratif partant des pratiques (Abboud et al., 2021)

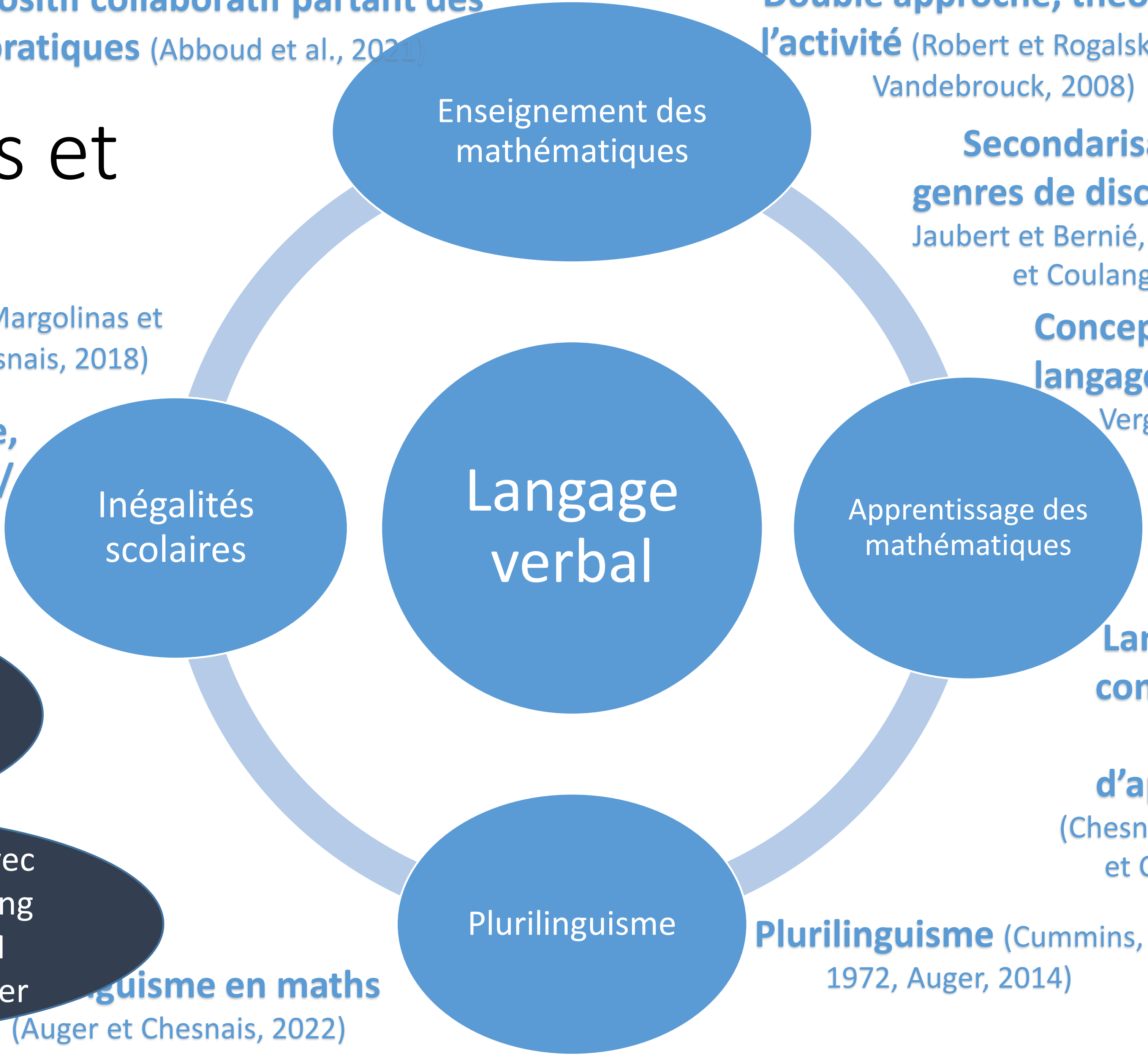
Double approche, théorie de l'activité (Robert et Rogalski, 2002, Vandebrouck, 2008)

Secondarisation des genres de discours (Rebière, Jaubert et Bernié, 2012, Chesnais et Coulange 2022)

Conceptualisation et langage (Vygotsky 1934, Vergnaud, 1990)

transparence, (Margolinas et Laparra, 2011, Chesnais, 2018)

Hypothèse relationnelle, différenciation passive / active (Bautier et Goigoux, Rochex et Crinon, 2011)



Langage verbal comme objet et moyen d'apprentissage (Chesnais, 2018, Chesnai et Coulange, 2022)

Plurilinguisme (Cummins, 1972, Auger, 2014)

guisme en maths (Auger et Chesnais, 2022)

Etude du processus de **secondarisation** des discours dans la classe de mathématiques

Un **travail collaboratif** avec des enseignants sur le long terme : le groupe IREM Didactique de Montpellier

Propriétés d’objets et relations entre objets en mathématiques

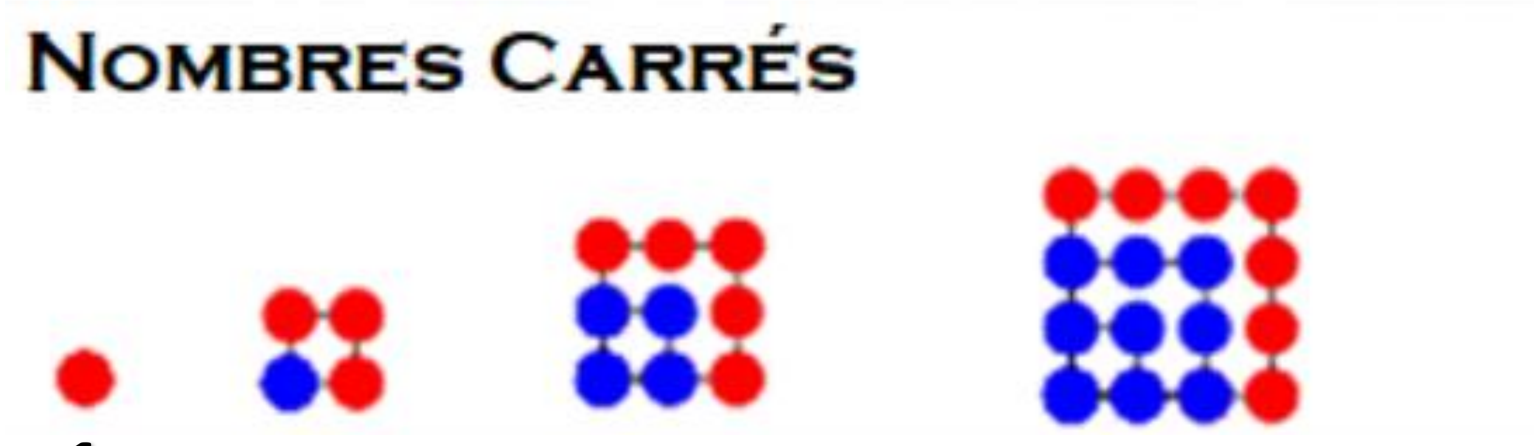
- « la notion de relation est une notion absolument générale. La connaissance consiste pour une part importante à établir des relations et à les organiser en systèmes. » (Vergnaud, 1982, p. 12)
  - Être le fils de, être derrière, être plus grand que, être entre … et …
- En mathématiques, ce ne sont pas les objets qui sont intéressants, mais les relations (Bourbaki, Hilbert et autres)
  - Relations à deux places : Être perpendiculaire à, être le centre de,
  - Relations à trois places : être à une distance de … cm de …, être le terme de rang… d’une suite…
  - Relations à quatre places : la proportionnalité

Les usages en mathématiques de la préposition « de » (Auger et Chesnais, 2022)

- Mot le plus fréquent dans les énoncés mathématiques (Laborde, 1982)
- Usage 1 : « distance *de*… à … » :
  - l’idée de point de départ
  - utilisé aussi fréquemment dans le langage courant.
- Usage 2 : « le centre *de* ce (du) cercle »
  - idée d’appartenance comme dans « le chapeau de Pierre »
  - très usité dans le langage courant.
- Usage 3 : « le cercle *de* centre O »
  - permet d’exprimer de façon concise une propriété de l’objet ;
  - pourrait être remplacé par une proposition relative
  - s’emploie également dans le langage courant « le chapeau de couleur rouge », mais est peu usité.
- Usage 4 : « équation de droite » : il s’agit ici d’un usage de type 2, mais avec ici une dimension générique quand on parle de la notion d’équation de droite.

Une expérimentation au lycée sur les suites

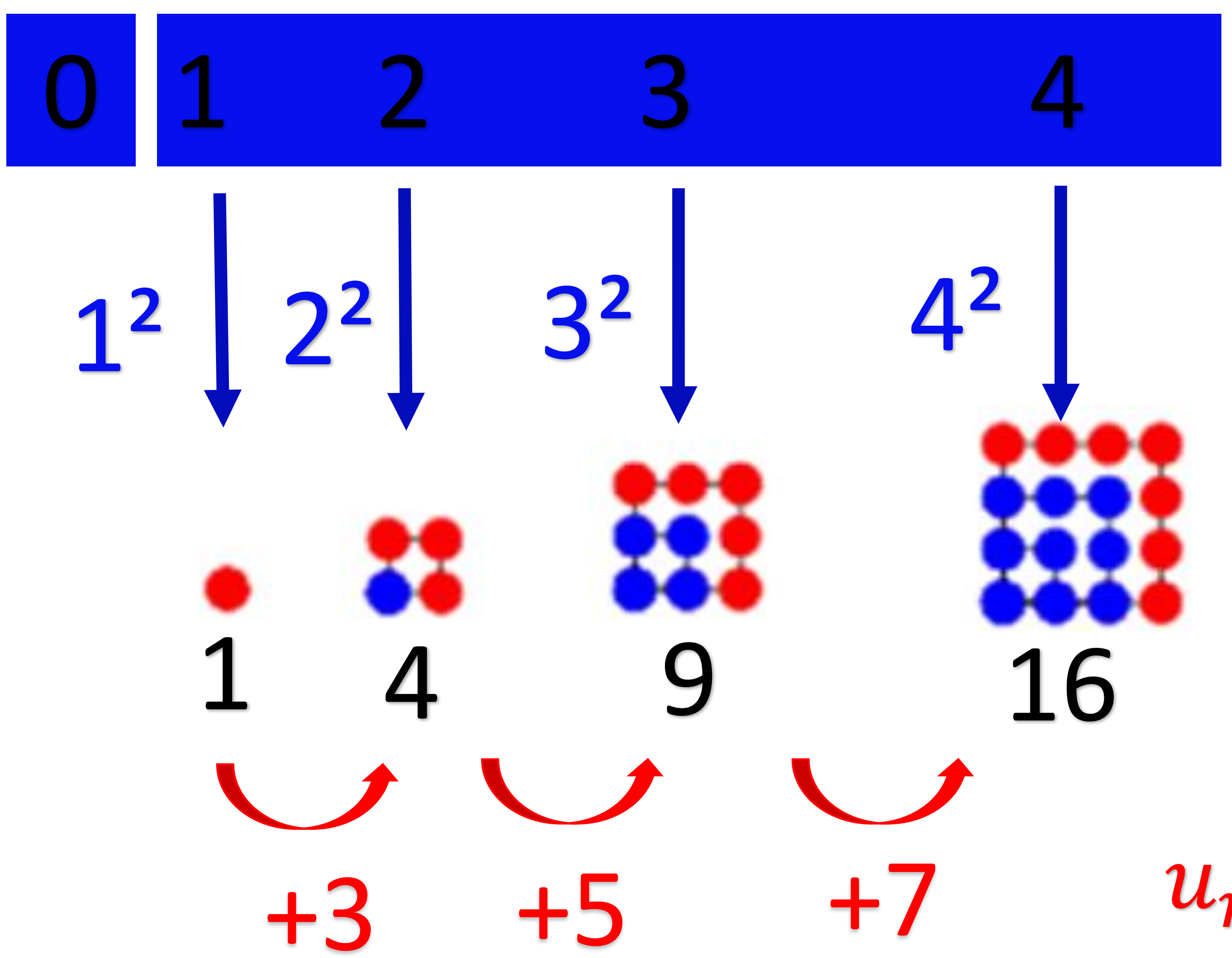
La notion de suite : une notion complexe



1 4 9 16

+3 +5 +7

http://villemin.gerard.free.fr/Denombre/NbFigure.htm



n

$$u_n = n^2$$

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Une pré-expérimentation

- Séquence élaborée et mise en œuvre par une enseignante du groupe IREM en classe de 1$^{\text{ère}}$ Spécialité
- Des tâches visant des productions langagières
- Introduction et travail autour d'une notation fonctionnelle

PARTIE A

Chacune des suites de nombres a été construite en suivant une règle précise qui se répète à chaque étape.
On appelle terme chaque nombre de la suite.

Rang du terme	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Suite a :	0	2	4	8	16	32					
Suite b :	0	1	4	9	16	25					
Suite c :	1	4	7	10	13	16			.		
Suite d :	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$					
Suite e :	0	3	6	9	12	15					

1) Décrire les règles de construction de chaque suite de nombre.
2) Compléter le tableau jusqu'au rang 10.
3) Exprimer en fonction de de n (un entier naturel quelconque) le terme de rang n de chacune des suites.
4) On numérote les termes de la suite en associant à chaque terme un rang.

Exemple : le terme de rang 3 de la suite b vaut 9 et on notera : $b(3)=9$ ou $b_3 = 9$

Compléter : $a_5 = \dots$ $c(2) = \dots$ $d_0 = \dots$ $e(4) = \dots$

Remarque : $b(3)=9$ ou $b_3 = 9$ est le 4ème terme de la suite dont la numérotation commence à 0.

5) Nommer des termes consécutifs (c'est-à-dire dont les rangs/indices se suivent) en complétant les pointillés

U_3 ; .... ; .... ;$U(5)$; .... ; .... ; U_{10}

$U(n)$; .... ; .... ;$U(n+2)$; .... ;U ;.........

Une prise d’appui sur le concept quotidien de « suite »

- « C’est une suite de nombres qui reprend la même logique à chaque fois »
- « une continuation logique d’une suite de nombres »

PARTIE A

Chacune des suites de nombres a été construite en suivant une règle précise qui se répète à chaque étape.
On appelle terme chaque nombre de la suite.

Rang du terme	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Suite a :	0	2	4	8	16	32					
Suite b :	0	1	4	9	16	25					
Suite c :	1	4	7	10	13	16					
Suite d :	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$					
Suite e :	0	3	6	9	12	15					

1) Décrire les règles de construction de chaque suite de nombre.
2) Compléter le tableau jusqu’au rang 10.
3) Exprimer en fonction de de n (un entier naturel quelconque) le terme de rang n de chacune des suites.
4) On numérote les termes de la suite en associant à chaque terme un rang.

Exemple : le terme de rang 3 de la suite b vaut 9 et on notera : $b(3)=9$ ou $b_3 = 9$

Compléter : $a_5 = \dots$ $c(2) = \dots$ $d_0 = \dots$ $e(4) = \dots$

Remarque : $b(3)=9$ ou $b_3 = 9$ est le 4ème terme de la suite dont la numérotation commence à 0.

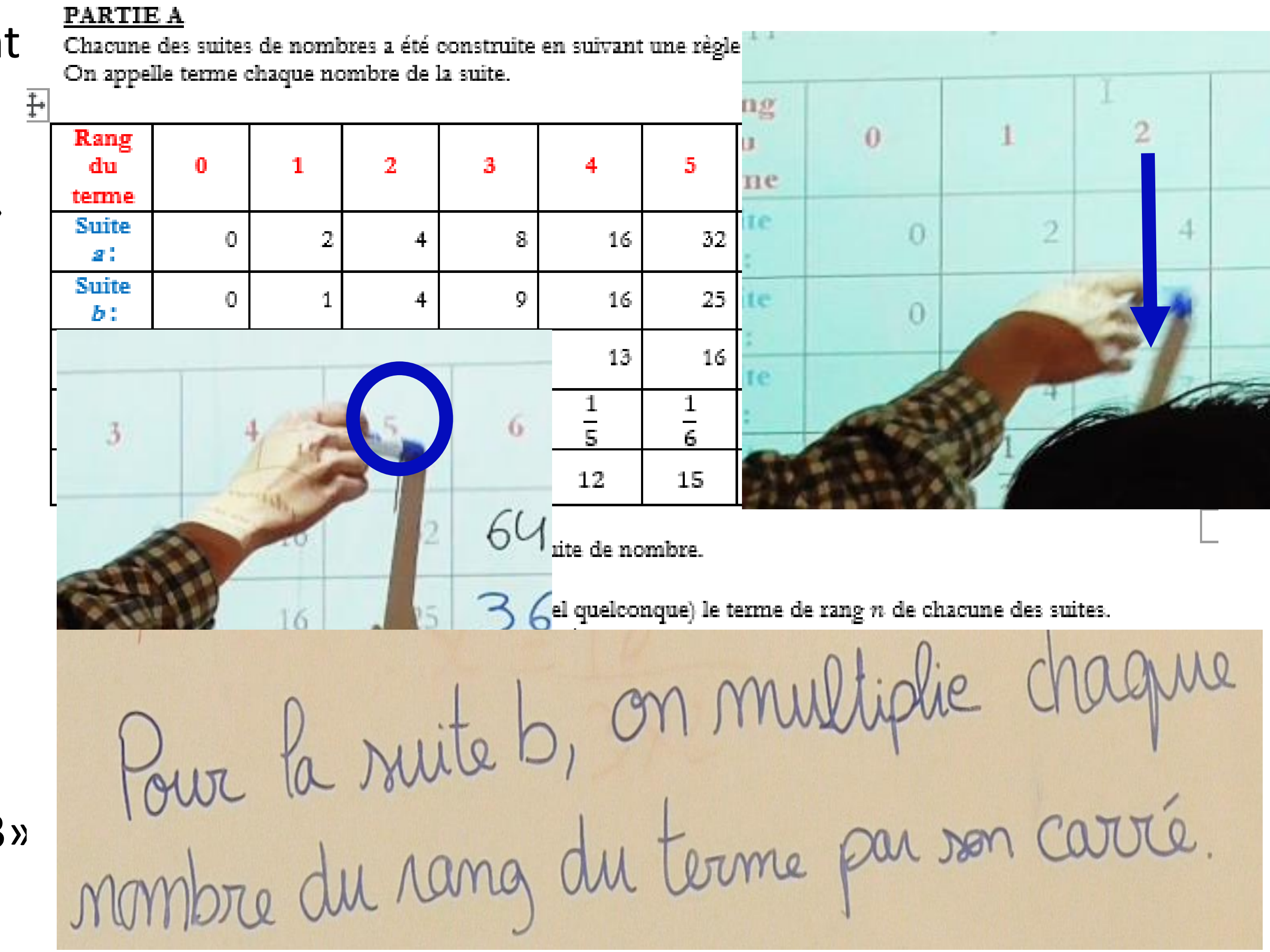
5) Nommer des termes consécutifs (c’est-à-dire dont les rangs/indices se suivent) en complétant les pointillés

U_3 ; .... ; .... ;$U(5)$; .... ; .... ; U_{10}

$U(n)$; .... ; .... ;$U(n+2)$; .... ;U ;.........

Une introduction précoce d’une formulation experte

- « j’ai complété cette suite en multipliant par le carré de chaque terme de la première ligne »
- « […] on a dit que terme c’était quoi ? »
- « Ah c’est ces chiffres là les chiffres du haut »
- « on va pas les appeler termes y’a un mot plus spécifique que j’ai déjà utilisé dans le tableau c’est quoi les nombres du haut qui sont en rouge ? »
- « rang du terme »
- « On multiplie les rangs du terme par 3»



Une introduction précoce d’une formulation experte

- M : « Moi c’est la même chose que la suite c on ajoute 3 à chaque terme précédent « […]
- E : « Au terme 0 on commence par 1 »
- P : « Au terme 0 alors on dit pas **terme 0** terme de rang 0 […] qu’est-ce qu’on veut dire en commençant M ?»
- M : « En / Fin le rang 0 fin on commence par le rang 0 / en commençant par 1 fin le terme au rang 0 est 1 »

PARTIE A

Chacune des suites de nombres a été construite en suivant une règle précise qui se répète à chaque étape.
On appelle terme chaque nombre de la suite.

Rang du terme	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Suite a :	0	2	4	8	16	32					
Suite b :	0	1	4	9	16	25					
Suite c :	1	4	7	10	13	16					
Suite d :	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$					
Suite e :	0	3	6	9	12	15					

1) Décrire les règles de construction de chaque suite de nombre.
2) Compléter le tableau jusqu’au rang 10.
3) Exprimer en fonction de de n (un entier naturel quelconque) le terme de rang n de chacune des suites.
4) On numérote les termes de la suite en associant à chaque terme un rang.

   Exemple : le terme de rang 3 de la suite b vaut 9 et on notera : $b(3)=9$ **ou** $b_3 = 9$

   Compléter : $a_5 = \ldots$ $c(2) = \ldots$ $d_0 = \ldots$ $e(4) = \ldots$

Remarque : $b(3)=9$ **ou** $b_3 = 9$ **est le 4ème terme de la suite dont la numérotation commence à 0.**

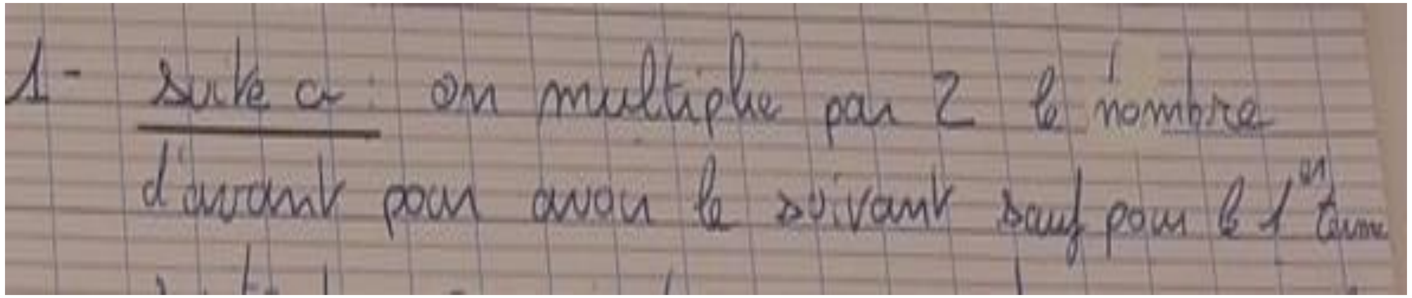
5) Nommer des termes consécutifs (c’est-à-dire dont les rangs/indices se suivent) en complétant les pointillés

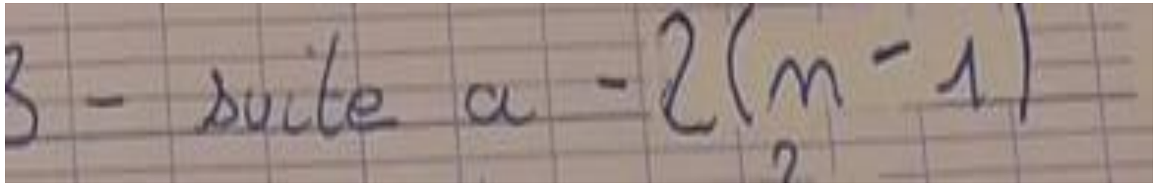
   U_3 ; .... ; ....;$U(5)$; .... ; .... ; U_{10}

   $U(n)$; .... ; .... ;$U(n+2)$; ....;U ;.........

Généralisation et difficultés liées à l’introduction d’une notation

- E : « Mais madame / dans l’énoncé ils disent que n c’est un entier naturel et le rang du terme c’est n aussi ?[…] Moi je pensais que n c’était que les nombres qui étaient là et que le rang du terme c’était un ./. c’était pas n en fait »
- E : « Mais moi n je l’ai remplacé par 4 »
- P : « Alors tu voulais parler de qui toi quand tu disais n ? »
- E : « Ben des .. des termes précédents »





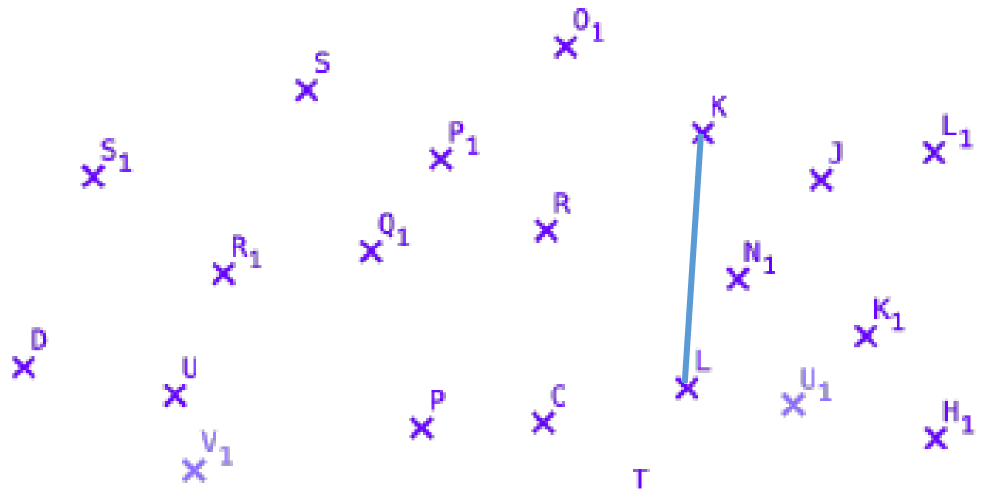
Une expérimentation en géométrie au début du collège

La notion de distance (Chevallard et Johsua, 1982, Cerclé et al, 2021)

- Notion complexe, au croisement de
  - un concept quotidien
  - une conception « intuitive » et « physique » dans la géométrie d'Euclide
  - un concept mathématique lié à l'émergence de l'analyse
  - ➢ Phénomènes complexes de transposition didactique
- Relation entre des parties du plan
  - Distance d'un point à un autre, d'un point à une droite

La distance entre deux points

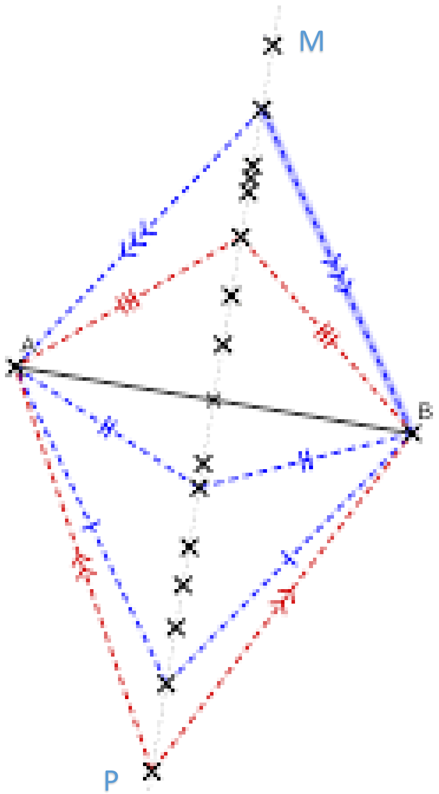
- Définition : La distance entre deux points est la longueur du segment qui joint ces deux points
  - Déconstruction dimensionnelle (Duval, 2002)
  - « Distance du point K au point L » ; « distance entre les points K et L » ; « KL »



Objet en partie transparent

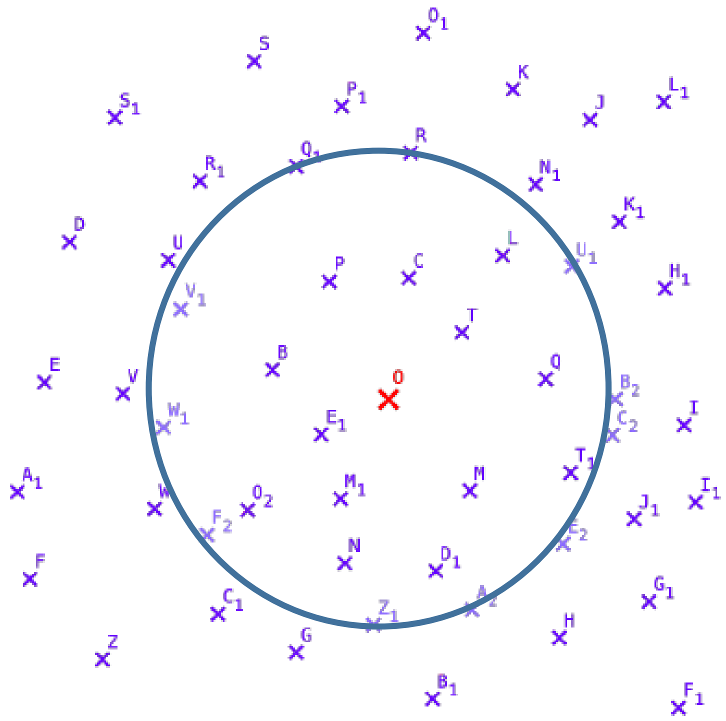
- Programmes du C3
  - « en 6ème, […] établir la notion de distance entre deux points, entre un point et une droite. »
  - définition du cercle en 6ème dans les repères annuels de progression
  - MAIS : « cercle (comme ensemble des points situés à une distance donnée d'un point donné) » dans les attendus de fin de CM1
- Une étude de manuels de 6ème montre que la distance entre deux points est traitée comme un objet supposé être déjà maîtrisé par les élèves (Cerclé et al., à paraître)
- La notion de distance n'est pas non plus questionnée en général dans le travail sur la droite graduée (Chesnais et Destribats, 2018)

Relations entre relations



Médiatrice d'un segment comme ensemble des points situés à une à équidistance des extrémités du segment

MA = MB et PA = PB



cercle comme ensemble des points situés à une distance donnée d'un point donné

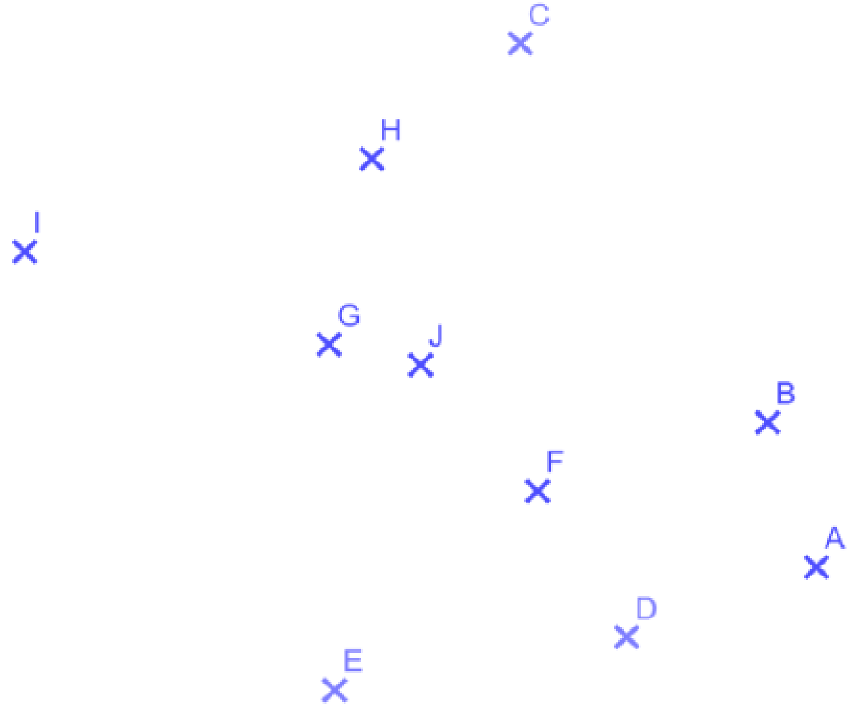
OR = OZ1 = OA2

La distance entre les points O et R est égale à la distance entre les points O et Z1

Un test

- Un exercice adapté des évaluations à l'entrée en sixième des années 2000
- La « bonne » procédure
  - Vérifier que les distances entre le point J et chacun des points B, C, D, E sont égales
  - Repose sur le fait que les points d'un cercle sont à équidistance du centre (ou l'inverse…) avec adaptations (Robert, 2008)
- Deux productions langagières demandées
- 6 classes expérimentales dont 4 en EP
- 9 classes témoins dont 4 en EP

Exercice 3 :



Dans le nuage de points ci-dessus, les points B, C, D et E sont situés sur un même cercle.
Le centre de ce cercle est l'un des points de la figure.
En utilisant ta **règle graduée**, trouve le centre de ce cercle puis réponds aux questions.

1. Explique pourquoi tu penses que le point que tu as trouvé est bien le centre du cercle.

……

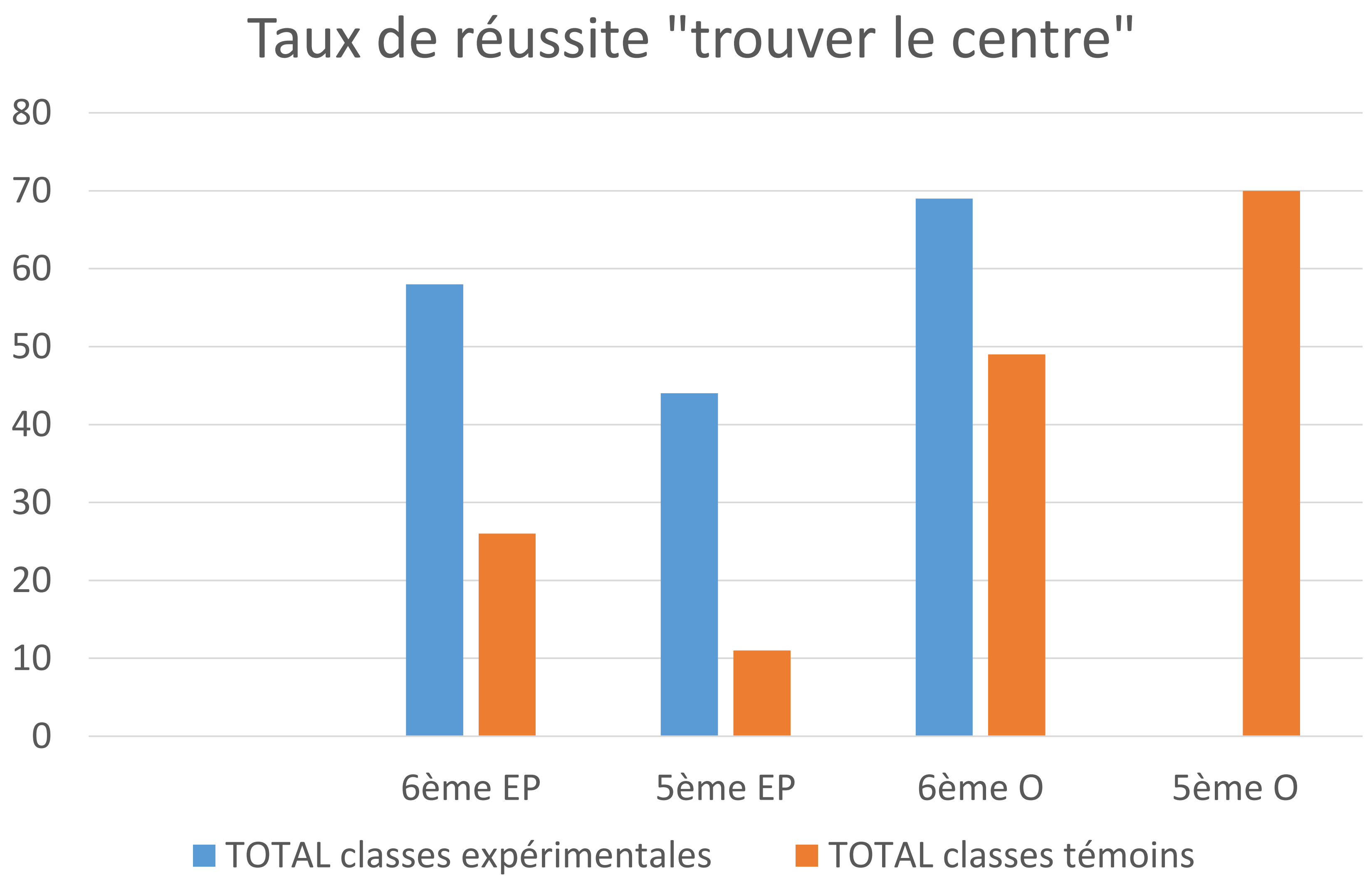
……

2. Ylan dit que : « ça ne peut pas être le point H parce que la longueur de B n'est pas la même que la longueur de C ». Le professeur dit qu'Ylan a raison mais que c'est mal dit.
Ecris de façon correcte ce qu'a voulu dire Ylan :

……

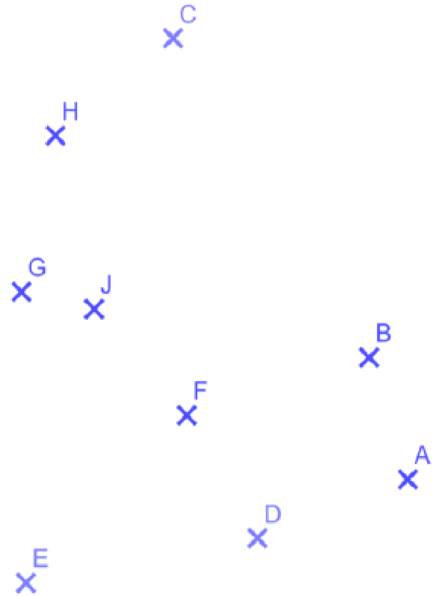
……

Résultats



Taux de réussite "trouver le centre"
80
70
60
50
40
30
20
10
0
6ème EP
5ème EP
6ème O
5ème O
TOTAL classes expérimentales
TOTAL classes témoins

Etude qualitative des productions langagières sur la question 2



Ylan dit que : « ça ne peut pas être le point H parce que la longueur de B n'est pas la même que la longueur de C ». Le professeur dit qu'Ylan a raison mais que c'est mal dit.
Ecris de façon correcte ce qu'a voulu dire Ylan :

- Relation de non-égalité de relations de distances entre couples de points
  - Mais peut s'appuyer sur la non-égalité des longueurs des segments (rayons)
- Suppose de corriger
  - en parlant des longueurs des segments [HB] et [HC] :

Ça ne peut pas être le point H car la longueur du segment [HB] n'est pas la même que la longueur du segment [HC]

  - OU en parlant des distances entre B et H et entre C et H

Ça ne peut pas être le point H car la distance de B à H n'est pas la même que la distance de C à H

Comparaison d'une classe expérimentale 6ème en EP et une classe témoin 6ème en EP

	Relation complète	Relations incomplètes / dont EC	Réponses inadéquates	NT	Usage de « distance »
Classe expérimentale	10	8 / 5	0	0	11
Classe témoin	4	9 / 8	2	6	1

- Relation complète

« Ça ne peut pas être le point H car la distance entre le point H et C est très proche contrèrement à la distance entre le point H et B. » (classe Exp.)

- Relation incomplète

« Ça ne peut pas être le point H car le point C n'est pas à la même distance que B » (classe Exp.)

- Relation incomplète avec erreur de catégorie

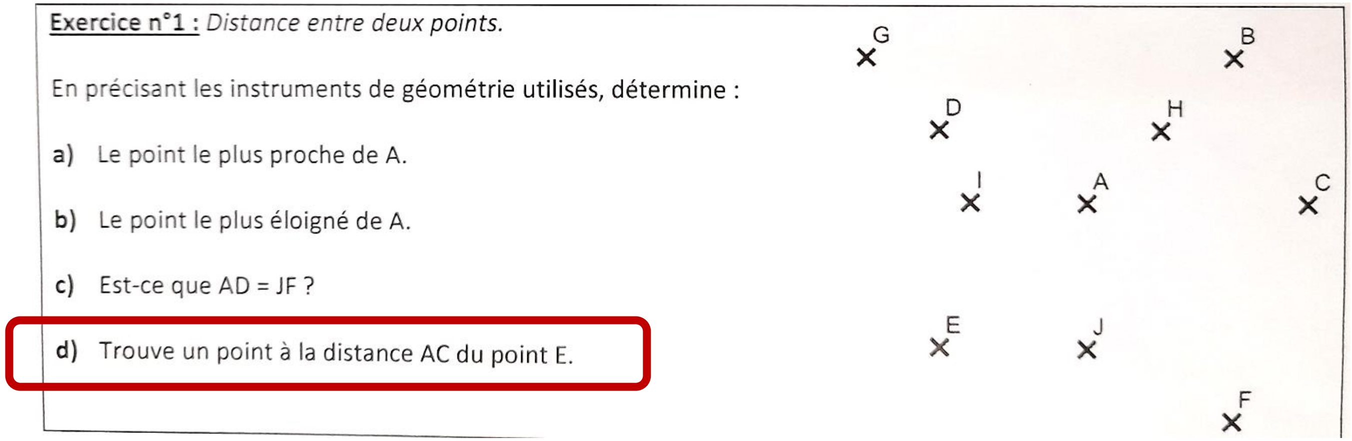
« Ça ne peut pas être le point H car le segment B et C n'est pas de même longueur » (classe témoin)

Des éléments de la séquence mise en œuvre

Les principes (Chesnais et al., soumis)

- Une séquence sur le cercle préparée collectivement
- Des tâches pour travailler sur la distance entre deux points (définition en lien avec la longueur d'un segment) et entre un point et une droite
- Une attention forte au langage
  - Des tâches pour faire produire du langagier aux élèves à l'oral et à l'écrit
  - Un travail à partir des productions des élèves
- Dans une classe : un travail plurilingue, en appui sur les ressources des élèves

Un exercice sur la notion de distance



Exercice n°1 : *Distance entre deux points.*

En précisant les instruments de géométrie utilisés, détermine :

a) Le point le plus proche de A.

b) Le point le plus éloigné de A.

c) Est-ce que AD = JF ?

d) Trouve un point à la distance AC du point E.

Chesnais et al. actes CORFEM 2022, à paraître

Un raisonnement : un pas déductif

Le point D est à la distance AC du point E

⇔ Le segment [DE] a la même longueur que le segment [AC]

Énoncé-tiers : la distance entre deux points est la longueur du segment qui joint ces deux points

Plusieurs formulations « équivalentes »

- DE=AC
- La distance de D à E est égale à la distance de A à C
- Le point D est à la même distance du point E que A de C

Enjeux

- Segments-longueurs / points-distances
- Complexité sur le plan logique et langagier, notamment de la prise en charge de la relation entre 4 objets
- La question de la notation AC (Chevallard et Joshua, 1982)

- **Énoncé**

a) Tracer un segment [AB] de longueur 5,5 cm.

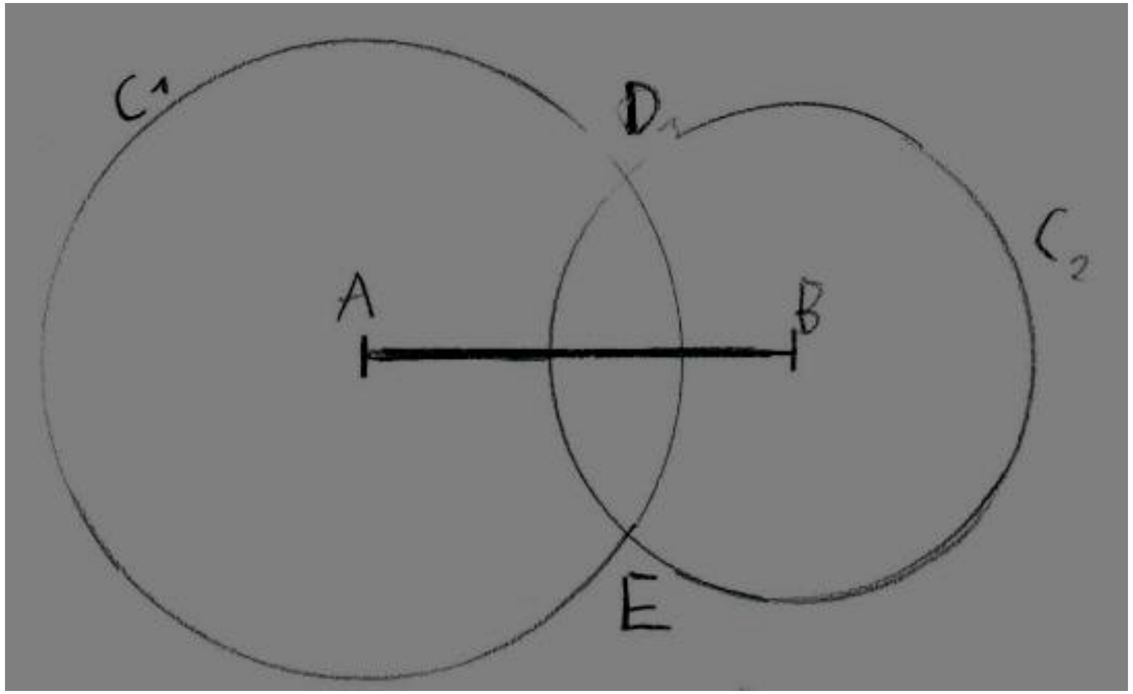
b) Tracer le cercle (C_1) de centre A et de rayon 4 cm.

c) Tracer le cercle (C_2) de centre B et de rayon 3 cm.

d) Nommer D et E les points d'intersection des deux cercles.

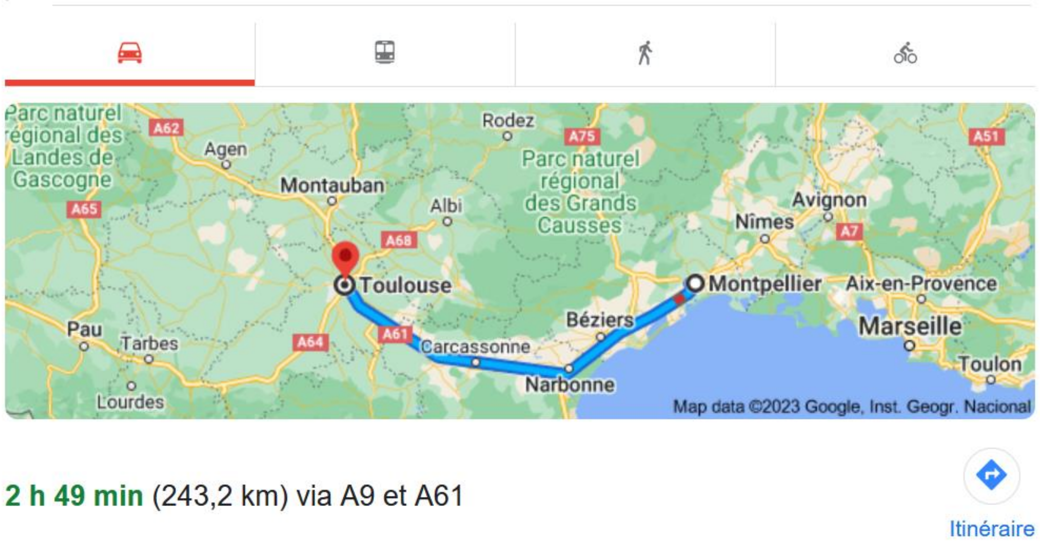
e) Quelle est la longueur AD ? Justifier votre réponse.

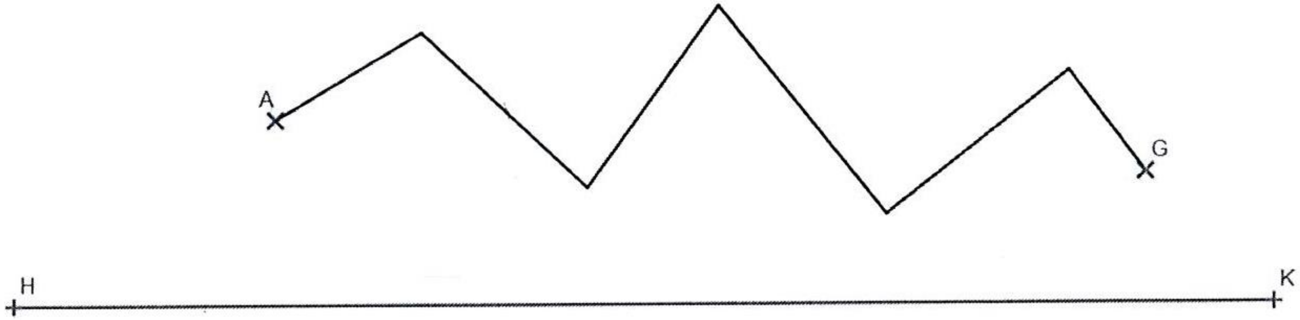
f) Quelle est la longueur BE ? Justifier votre réponse.



Chesnais et al. actes CORFEM 2022, à paraître

Une prise en charge du langagier





1) En utilisant l'instrument de votre choix, comparer la longueur des deux lignes ci-dessus.

2) Que peut-on dire de la distance entre le point A et le point G et la distance entre le point H et l
point K ? Expliquer votre réponse.

Question 2 : écrire une phrase expliquant ce qu'est la distance

Une traduction

- Le téléphone montrait la distance entre Montpellier et Toulouse

En turc

- Telefon Montpellier ve Toulouse arasindaki mesafeyi gösterdi.
- Telefon, Montpellier ile Toulouse arasindaki mesafeyi gösterdi.

- A quelle distance sommes-nous du restaurant ?
- Qui connaît le mot distance en arabe ?

En arabe

- kam nahnou baeidun min almateam? كم نحن بعيدون عن المطعم؟

Correction de la phrase expliquant ce qu’est la distance

- Que pensez-vous des définitions suivantes écrites par des élèves ?

Dire si elles sont correctes ou les corriger pour les améliorer.

1. La distance est la longueur du segment [AG]
2. Une distance est la longueur entre les deux extrémités d’un segment.
3. Une distance d’une ligne brisée
4. La distance du point C au point H c’est la longueur du segment [CH].